

## **SPI (eng. Standardized Precipitation Index)**

SPI su stvorili 1993. T. Mckee, N. Doesken i J. Kleist (Colorado Climate Center). Proračun SPI ovisi samo o podacima za količinu oborina. Njegova osnovna karakteristika je da može biti izračunat za različite vremenske intervale (1, 3, 6, 9, 12, 24 i 48 mjeseci). Ova raznolikost omogućava da SPI prati kratkoročne vodene zalihe (važno za agronomiju) i dugoročne vodene zalihe koje su povezane s protokom vode u rijekama, razinom vode u jezerima i podzemnim bunarima vode (važno za hidrologiju). Sposobnost SPI da se promatraju različiti vremenski intervale omogućava da se suša pravovremeno registrira i prati tijekom trajanja. Računanje SPI za određeni vremenski period na bilo kojem mjestu zahtijeva dugi niz mjesečnih podataka za količinu oborine, najmanje 30-godišnji niz. Funkcija vjerojatnosti razdiobe je određena iz dugogodišnjih podataka (metoda maksimalne vjerojatnosti). Razdioba kumulativnih vjerojatnosti je onda transformirana, koristeći jednaku vjerojatnost kumulativnih vjerojatnosti, u normalnu razdiobu sa srednjakom koji je jednak 0 i standardnom devijacijom 1, tako da su vrijednosti SPI, zapravo izražene u standardnim devijacijama. Ukupna količina oborine za određeno vremensko razdoblje se onda povezuje s određenim vrijednostima SPI (u skladu s vrijednostima kumulativne vjerojatnosti). Pozitivne vrijednosti SPI pokazuju da je količina oborine u određenom vremenskom razdoblju veća od medijana dobivenog iz višegodišnjih mjerenja količine oborine, dok negativne vrijednosti SPI pokazuju da je količina oborine u određenom vremenskom razdoblju manja od medijana. Magnituda razmaka od 0 opisuje vjerojatnost pojave. Zbog toga što razdioba SPI odgovara normalnoj razdiobi, očekujemo da vrijednosti SPI budu između +1 i -1 u približno 68% slučajeva, između +2 i -2 u 95% slučajeva, te između +3 i -3 u 99% slučajeva.

### 3.1 Teorijski izvod

Thom (1966) je ustanovio da gama razdioba dobro opisuje podatke za količinu oborine.

Gama razdioba (slika 1) je određena funkcijom vjerojatnosti:

Funkcija vjerojatnosti je definirana za  $x > 0$ .

$$g(x) = \frac{1}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\frac{x}{\beta}} \quad (3.1.1)$$

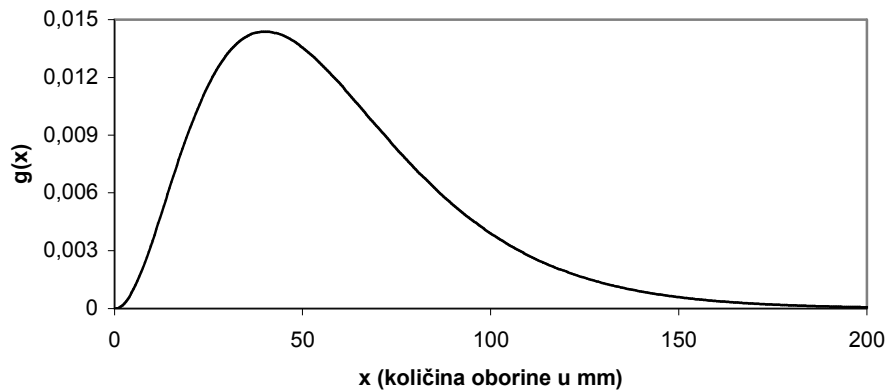
$\alpha$  je parametar oblika i  $\alpha > 0$ .

$\beta$  je parametar skale i  $\beta > 0$ .

$x$  je količina oborine.

$\Gamma(\alpha)$  je gama funkcija i definirana je izrazom:

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} y^{\alpha-1} e^{-y} dy \quad (3.1.2)$$



**Slika 1. Funkcija vjerojatnosti za gama razdiobu ( $\alpha=3.241$  i  $\beta=17.862$ ). Parametri su određeni za prosinac za Varaždin**

Proračun SPI zahtijeva da se odredi teorijska funkcija vjerojatnosti gama razdiobe koja dobro opisuje razdiobu učestalosti količina oborine. Parametri oblika i skale se procjenjuju upotrebom metode maksimalne vjerodostojnosti iz višegodišnjih nizova podataka (količina oborine). Procjene parametara  $\alpha$  i  $\beta$  su :

$$\alpha_{pro} = \frac{1}{4A} \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{4A}{3}} \right) \quad (3.1.3)$$

$$A = \ln(x_{sr}) - \frac{\sum_i \ln(x_i)}{n} \quad (3.1.5)$$

$$\beta_{pro} = \frac{x_{sr}}{\alpha_{pro}} \quad (3.1.4)$$

$x_{sr}$  = srednja vrijednost količina oborina

$n$  = broj mjerenja

$x_i$  = količina oborine u nizu podataka ( $i=1,2,3,\dots,n$ )

Upotrebom dobivenih procjena parametara gama razdiobe slijedi proračun kumulativne vjerojatnosti gama razdiobe (za izmjerenu vrijednost količine oborine  $x$ ). Kumulativna vjerojatnost se računa pomoću izraza:

$$G(x) = \int_0^x g(x) dx = \frac{1}{\beta_{pr} \alpha_{pr} \Gamma(\alpha_{pr})} \int_0^x x^{\alpha_{pr}-1} e^{-\frac{x}{\beta_{pr}}} dx \quad (3.1.6)$$

Funkcija vjerojatnosti gama razdiobe nije definirana za  $x=0$ . Zato se mogućnost da je količina oborine jednaka 0 mm, tj. da nije bilo oborine, uključuje u proračun pomoću izraza:

$$H(x) = q + (1 - q)G(x) \quad (3.1.7)$$

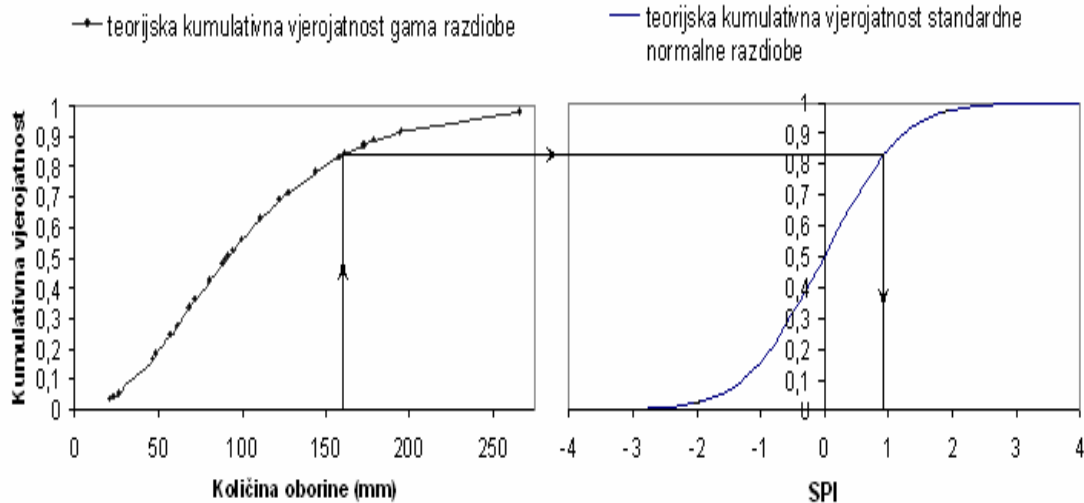
$q$  = vjerojatnost da je količina oborine jednaka nuli

Ako je  $m$  broj slučajeva (u dugogodišnjem nizu podataka) kada je podatak za količinu oborine jednak 0 mm, a  $n$  je ukupan broj podataka, tada se  $q$  računa pomoću izraza:

$$q = \frac{m}{n} \quad (3.1.8)$$

Nakon što smo odredili kumulativnu vjerojatnost  $H(x)$ , slijedi transformacija vrijednosti  $x$  (količine oborine) u vrijednost SPI. Transformacija prvog podatka (količine oborine) iz neke razdiobe (gama razdiobe) u drugi podatak (SPI) s različitim razdiobom (normalnom razdiobom) može provesti ako je zadovoljena jednakost kumulativnih vjerojatnosti prve i druge razdiobe (Panofsky i Brier, 1958). To jest, vjerojatnost da je prvi podatak  $x$  manji od neke vrijednosti  $x_0$  jednaka je vjerojatnosti da je SPI manji od neke vrijednosti  $SPI_0$ .

## Grafički proračun SPI



**Slika 2. Primjer određivanja SPI pomoću grafičkih prikaza kumulativnih vjerojatnosti gama razdiobe i standardne normalne razdiobe (Karlovac, kolovoz 1963., količina oborine=158,8 mm,  $H(x)=0.833$ ,  $SPI=0.966$ )**

U primjeru sa slike 2. količina oborine u kolovozu 1963 godine za postaju Karlovac je bila 158,8 mm. Za kolovoz su određeni parametri oblika i skale gama razdiobe ( $\alpha=2.819$  i  $\beta=36.709$ ) i izračunate su teorijske kumulativne vjerojatnosti  $H(x)$  iz 30-godišnjeg niza podataka za količine oborine (vremenski interval je 1 mjesec). Da bismo izračunali SPI moramo povući okomitu crtu (na grafu kumulativne vjerojatnosti gama razdiobe) od veličine  $x=158,8$  mm do točke presjeka s krivuljom teorijske kumulativne vjerojatnosti. Tada povlačimo horizontalnu crtu do presjeka sa krivuljom kumulativne vjerojatnosti za standardnu normalnu razdiobu (srednjak je 0, a standardna devijacija je 1). Slijedi okomita crta do osi x na kojoj se nalaze vrijednosti SPI koje očitamo.

## Numerički proračun SPI

Bilo bi vrlo nespretno i naporno crtati krivulje teorijske kumulativne vjerojatnosti za sve postaje, za svaki mjesec i za razne vremenske intervale. Računanje SPI-a je mnogo brže i jednostavnije upotrebom računala i aproksimativnih izraza (Abramowitz i Stegun, 1965):

$$SPI = -\left(t - \frac{c_0 + c_1 t + c_2 t^2}{1 + d_1 t + d_2 t^2 + d_3 t^3}\right) \quad \text{za } 0 < H(x) \leq 0.5 \quad (3.3.1)$$

$$SPI = +\left(t - \frac{c_0 + c_1 t + c_2 t^2}{1 + d_1 t + d_2 t^2 + d_3 t^3}\right) \quad \text{za } 0.5 < H(x) < 1.0 \quad (3.3.2)$$

Varijabla  $t$  je funkcija teorijske kumulativne vjerojatnosti:

$$t = \sqrt{\ln\left(\frac{1}{(H(x))^2}\right)} \quad \text{za } 0 < H(x) \leq 0.5 \quad (3.3.3)$$

$$t = \sqrt{\ln\left(\frac{1}{(1.0 - H(x))^2}\right)} \quad \text{za } 0.5 < H(x) \leq 1.0 \quad (3.3.4)$$

$c_0, c_1, c_2, d_1, d_2$  i  $d_3$  su koeficijenti i njihove numeričke vrijednosti su:

$$c_0 = 2.515517$$

$$c_1 = 0.802853$$

$$c_2 = 0.010328 \quad (3.3.5)$$

$$d_1 = 1.432788$$

$$d_2 = 0.189269$$

$$d_3 = 0.001308$$

## **Primjer proračuna SPI**

Za proračun vrijednosti SPI3 za primjerice kolovoz 2003. godine za postaju Bjelovar trebamo imati dugogodišnji niz (minimum 30 godina) mjesečnih količina oborine te količine oborine za mjesec od lipnja do kolovoza 2003. godine. Sumiramo mjesečne količine oborine za 6, 7 i 8 mjesec za svaku godinu iz dugogodišnjeg niza, te za 2003. godinu. Iz dugogodišnjeg niza smo dobili podniz podatka tromjesečnih količina oborine za kolovoz. Slijedi proračun parametara gama razdiobe pomoću izraza (3.1.3) i (3.1.4), te proračun  $H(x)$  pomoću izraza (3.1.7) ( $x = 3$  mjesečna količina oborine od lipnja do kolovoza 2003. godine), a nakon toga je moguće proračunati vrijednost SPI3 pomoću izraza (3.3.1) ili (3.3.2).

Za proračun vrijednosti SPI6 za primjerice lipanj 2003. godine za postaju Bjelovar trebamo imati dugogodišnji niz (minimum 30 godina) mjesečnih količina oborine te količine oborine za mjesec od siječnja do lipnja 2003. godine. Sumiramo mjesečne količine oborine za 1, 2, 3, 4, 5 i 6 mjesec za svaku godinu iz dugogodišnjeg niza, te za 2003. godinu. Iz dugogodišnjeg niza smo dobili podniz podatka šestomjesečnih količina oborine za lipanj. Slijedi proračun parametara gama razdiobe pomoću izraza (3.1.3) i (3.1.4), te pomoću izraza (3.1.7) proračun  $H(x)$  ( $x = 6$  mjesečna količina oborine od siječnja do lipnja 2003. godine), a nakon toga SPI6 pomoću izraza (3.3.1) ili (3.3.2).

Proračuni vrijednosti SPI1 i SPI12 su slični gore opisanim proračunima, s time da se promatra 1 mjesečna količina ili 12 mjesečna količina oborine.

## **Karakteristike SPI**

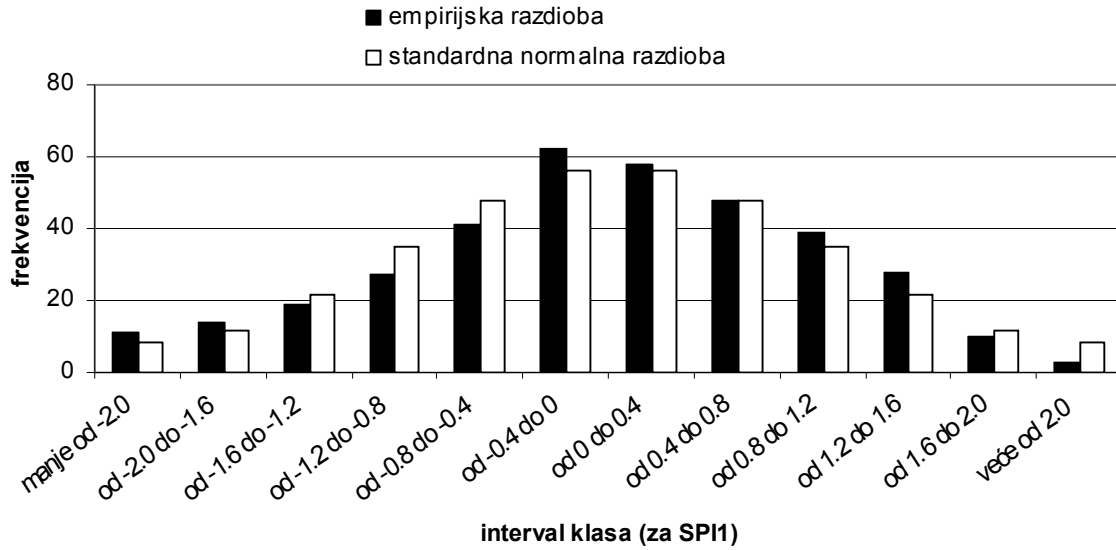
Prostorna i vremenska dimenzija suše generiraju problem kod stvaranja indeksa za sušu, zato što anomalija mora biti normalizirana ne samo u odnosu na postaju, već i u odnosu na vrijeme. SPI ispunjava oba uvjeta. SPI je normaliziran u odnosu na postaju (prostorno) zato što proračun SPI uključuje razdiobu učestalosti količine oborine za svaku postaju, a u odnosu na vrijeme zato jer neovisno o položaju postaje u prostoru ili o vremenskom intervalu proračuna, postoji veza između kumulativne vjerojatnosti i SPI u odnosu na referentno vremensko razdoblje iz kojega su procijenjeni parametri gama razdiobe.

**Tablica 1. Povezanost SPI i kumulativne vjerojatnosti**

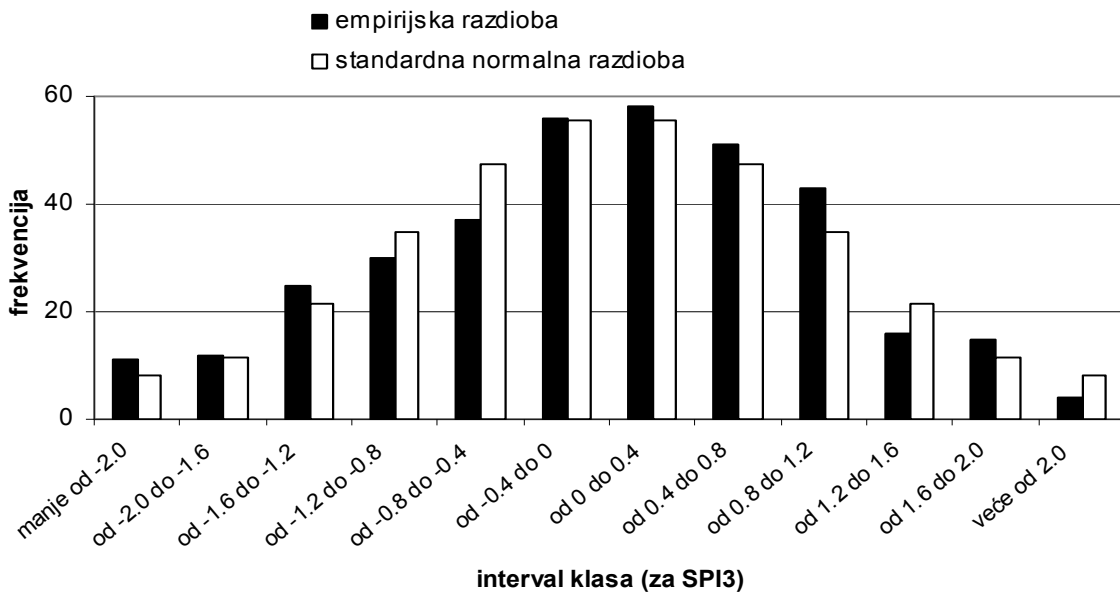
<b>SPI</b>	<b>Kumulativna vjerojatnost H(x)</b>
<b>-3.0</b>	<b>0.0014</b>
<b>-2.5</b>	<b>0.0062</b>
<b>-2.0</b>	<b>0.0228</b>
<b>-1.5</b>	<b>0.0668</b>
<b>-1.0</b>	<b>0.1587</b>
<b>-0.5</b>	<b>0.3085</b>
<b>0.0</b>	<b>0.5000</b>
<b>+0.5</b>	<b>0.6915</b>
<b>+1.0</b>	<b>0.8413</b>
<b>+1.5</b>	<b>0.9332</b>
<b>+2.0</b>	<b>0.9772</b>
<b>+2.5</b>	<b>0.9938</b>
<b>+3.0</b>	<b>0.9986</b>



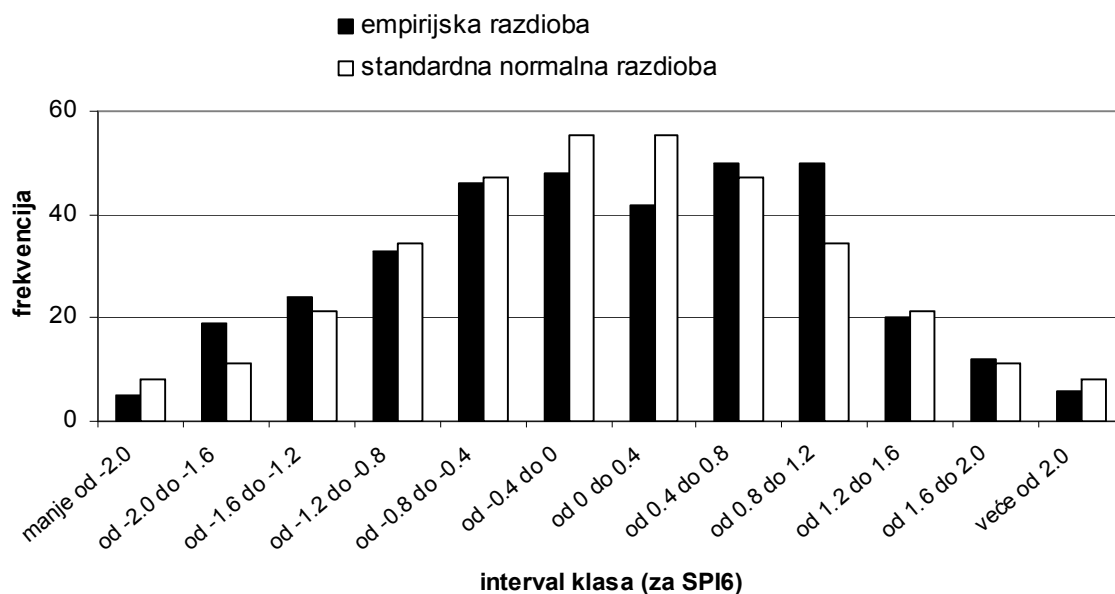
Tijekom razdoblja za koji su proračunati parametri gama razdiobe, razdioba SPI će biti približno jednaka standardnoj normalnoj razdiobi (slike 3, 4, 5 i 6).



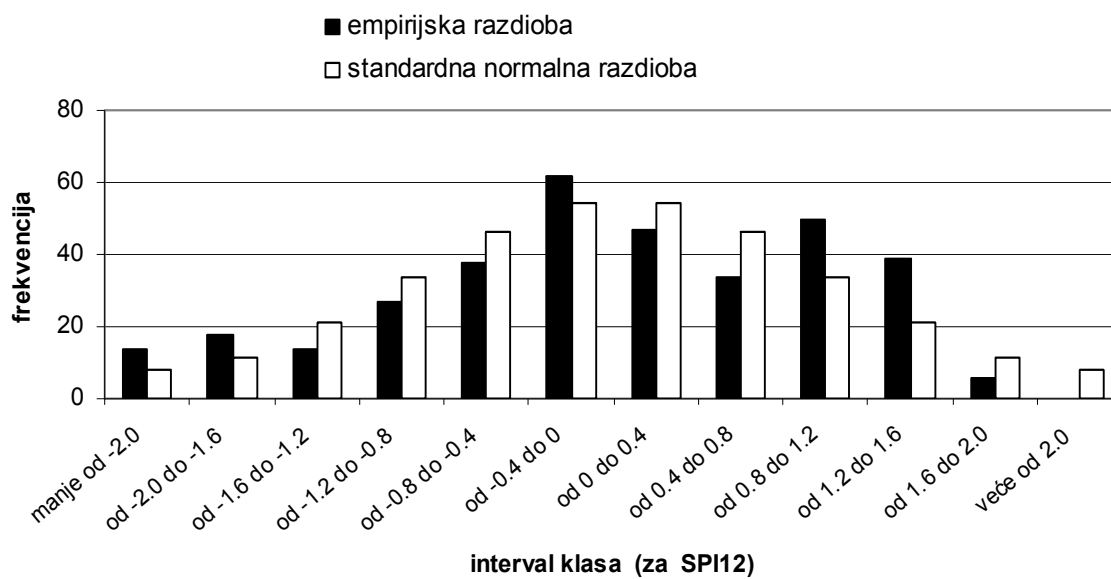
Slika 3. Usporedba empirijske razdiobe (za SPI1) i teorijske standardne normalne razdiobe (Slavonski Brod, razdoblje 1.1961-12.1990.)



Slika 4. Usporedba empirijske razdiobe (za SPI3) i teorijske standardne normalne razdiobe (Slavonski Brod, razdoblje 3.1961-12.1990.)



Slika 5. Usporedba empirijske razdiobe (za SPI6) i teorijske standardne normalne razdiobe (Slavonski Brod, razdoblje 6.1961-12.1990.)



Slika 6. Usporedba empirijske razdiobe (za SPI6) i teorijske standardne normalne razdiobe (Slavonski Brod, razdoblje 6.1961-12.1990.)

SPI ima nekoliko dobrih osobina ali i nedostataka. Prva prednost SPI nad drugim indeksima je jednostavnost. SPI se bazira samo na podacima o količini oborine. Drugo, SPI je moguće proračunati na bilo kojoj vremenskoj skali, što daje mogućnost da se promatra kako odstupanje količina oborine u različitim vremenskim intervalima utječe na agronomsku i hidrološku sušu. Svestranost SPI je važna i za praćenje dinamike suše, što je teško pratiti pomoću drugih indeksa. Treća prednost SPI je da zbog normalne razdiobe, učestalost ekstremnih i ozbiljnih suša je konzistentna za svako mjesto i za svaku vremensku skalu. McKee (1993) je predložio klasifikacijsku skalu za SPI (tablica 2). Za ispravnu interpretaciju vrijednosti SPI potrebno je poznavati klimatologiju područja koje se promatra.

**Tablica 2. Klasifikacijska skala za vrijednosti SPI**

Vrijednosti SPI	Klase	Kumulativna vjerojatnost H(x)
2.0 i više	ekstremno kišno	$H(x) < 0.023$
1.5 do 1.99	vrlo kišno	$0.023 < H(x) \leq 0.067$
1.0 do 1.49	umjereno kišno	$0.067 < H(x) \leq 0.159$
-0.99 do 0.99	u granicama normale	$0.159 < H(x) \leq 0.841$
-1.0 do -1.49	umjereno suho	$0.841 < H(x) \leq 0.933$
-1.5 do -1.99	vrlo suho	$0.933 < H(x) \leq 0.977$
-2.0 i manje	ekstremno suho	$0.977 < H(x)$

Nedostatak SPI jest to što vrijednosti SPI ovise o vremenskom razdoblju iz kojeg su izračunati parametri gama razdiobe. Također, za neke podatke nije moguće aproksimirati empirijsku razdiobu s teorijskom razdiobom (to vrijedi za ekstremno sušna područja). Treći nedostatak SPI jest da može promatrati promjene samo u oborinskom režimu nekog područja.

### Literatura

<sup>1</sup>Abramowitz M. and Stegun A. 1965. Handbook of mathematical formulas, graphs and mathematical tables. Dover publications, Inc.: New York.

<sup>2</sup>McKee TB, Doeksen NJ, Kleist J. 1993. The relationship of drought frequency and duration on time scales. In Proceedings of the 8<sup>th</sup> conference of applied climatology, 17-22 January, Anaheim, CA. American Meteorology Society: Boston MA: 179-184

<sup>3</sup>Panofsky HA. and Brier GW. 1958. Some applications of statistics to meteorology. Pennsylvania State University. University Park

<sup>4</sup>Thom HCS. 1958. A note on the gamma distribution. Monthly Weather Review 86: 117-122